

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(0) = 4$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \cdot 2^{2x} + 4^x = 4$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 3x - 2$ și punctul $A(a, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul A aparține dreptei d .
- 5p 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = 10$ și $\cos A = 0$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(2n^2)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{2x}{y+2} + \frac{2y}{x+2}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 0 = 1$.
- 5p b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$, x nenul, pentru care $x * \frac{4}{x} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $m \in (1, 2]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 9}$.

5p a) Arătați că $\int_1^5 (f(x) - \sqrt{x^2 + 9}) dx = 0$.

5p b) Arătați că $\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = 2$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 8 - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 6 =$ $= 8 - 6 = 2$	3p 2p
2.	$f(0) = m, (f \circ f)(0) = 4m$ $4m = 4$, de unde obținem $m = 1$	3p 2p
3.	$3 \cdot 4^x + 4^x = 4$, deci $4 \cdot 4^x = 4$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Deoarece cifra zecilor poate fi 1, 2, 3 sau 6, în mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4 \cdot 10 = 40$ de numere care au cifra zecilor divizor al numărului 6, deci sunt 40 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$	2p 3p
5.	$a = 3a - 2$ $a = 1$	3p 2p
6.	$A = \frac{\pi}{2}$ $AC = AB \Rightarrow \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & -y-x & y^2 + 2xy + x^2 \\ 0 & 1 & -2y-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -(x+y) & (x+y)^2 \\ 0 & 1 & -2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(4n+6)$, pentru orice număr natural n $4n+6 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	3p 2p
2.a)	$1 * 0 = \frac{2 \cdot 1}{0+2} + \frac{2 \cdot 0}{1+2} =$ $= 1 + 0 = 1$	3p 2p

b)	$x * 0 = \frac{2x}{0+2} + \frac{2 \cdot 0}{x+2} = x, \text{ pentru orice } x \in M$ $0 * x = \frac{2 \cdot 0}{x+2} + \frac{2x}{0+2} = x, \text{ pentru orice } x \in M, \text{ deci } e = 0 \text{ este elementul neutru al legii de compoziție „*”}$	2p 3p
c)	$x * \frac{4}{x} = \frac{2x}{\frac{4}{x}+2} + \frac{\frac{8}{x}}{x+2} = \frac{x^2}{x+2} + \frac{8}{x(x+2)} = \frac{x^3+8}{x(x+2)}, \text{ pentru orice } x \in M, x \text{ nenul}$ $\frac{x^3+8}{x(x+2)} = x \text{ și, cum } x \in M, x \text{ nenul, obținem } x = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} =$ $= \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, 1]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 1]$ Pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, f(1) = 2 + \frac{1}{e-1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ Cum f este continuă, f este strict crescătoare pe $(-\infty, 1)$ și f este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$, obținem că, pentru orice $m \in (1, 2]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică	3p 2p
2.a)	$\int_1^5 (f(x) - \sqrt{x^2+9}) dx = \int_1^5 (3-x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big _1^5 =$ $= 15 - \frac{25}{2} - 3 + \frac{1}{2} = 0$	3p 2p
b)	$\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_0^4 \frac{(x^2+9)'}{2\sqrt{x^2+9}} dx = \sqrt{x^2+9} \Big _0^4 =$ $= 5 - 3 = 2$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}} dx, \text{ pentru orice număr natural nenul } n$ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 3-x+\sqrt{x^2+9} \geq 3-x \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}} \leq \frac{x^n}{2}, \text{ deci } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)},$ pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	2p 3p